情報デザイン専攻

画像情報処理論及び演習II

－フィルタ処理・エッジ強調－
線形フィルタとノイズ

第5回講義
水曜日１限
教室6218

吉澤　信
shin@riken.jp, 非常勤講師
大妻女子大学　社会情報学部
独立行政法人 理化学研究所

今日の授業内容

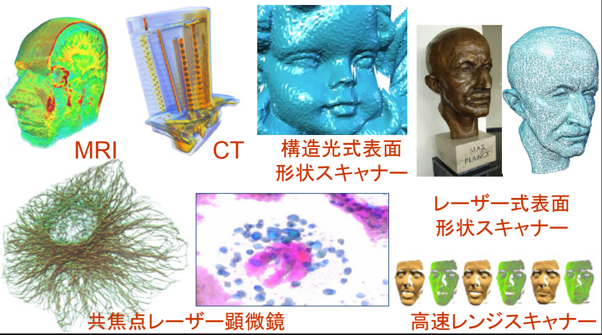
www.riken.jp/brict/Yoshizawa/Lectures/index.html
www.riken.jp/brict/Yoshizawa/Lectures/Lec18.pdf

1. 線形フィルタの基礎.
2. 画像復元の基礎.
3. 演習：線形フィルタ.

今日の演習は第2回のレポートで出すので、
みなさん頑張ってくださいねーp(^^)q

ノイズ除去・画像復元・フィルタリングの背景

- ✓ 自然科学では観察・観測による画像解析が重要である.
- ✓ 測定・計測に基づくCAD/CAM/CAEも注目されている.

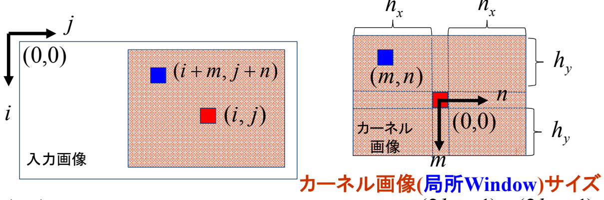


重要：線形フィルタ

✓ 線形フィルタ（畳み込み和、Convolution）：

$$I(i,j) = \sum_{m=-h_y}^{h_y} \sum_{n=-h_x}^{h_x} f(i+m, j+n)h(m,n)$$

I 出力画像　　f 入力画像　　h カーネル画像：フィルタ



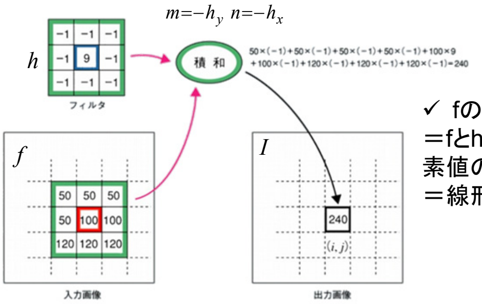
カーネル画像(局所Window)サイズ

(i,j) フィルタを適用している画素の座標値　　$(2h_y+1)\times(2h_x+1)$

重要：線形フィルタ

✓ 線形フィルタ（畳み込み和、Convolution）：

$$I(i,j) = \sum_{m=-h_y}^{h_y} \sum_{n=-h_x}^{h_x} f(i+m, j+n)h(m,n)$$



✓ fの重み付和
＝fとhの対応画素値の積和
＝線形フィルタ.

Normalized Convolution

✓ 正規化された畳み込み和：

$$I^{\text{new}}(\mathbf{x}) = \frac{\int Z(\mathbf{x},\mathbf{y})I(\mathbf{y})d\mathbf{y}}{\int Z(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{y}}$$

$$I(i,j) = \frac{1}{W}\sum_{m=-h_y}^{h_y} \sum_{n=-h_x}^{h_x} f(i+m, j+n)h(m,n),$$

$$W = \sum_{m=-h_y}^{h_y} \sum_{n=-h_x}^{h_x} h(m,n)$$

重みの和が１のときPartition of Unityを満たすと言い、画像の輝度値が定数だった場合にフィルタ後の輝度値も同じ定数である事を保証する(constant reproductively)＝平均である.

$$a*100+b*100+c*100 \qquad \frac{a*100+b*100+c*100}{a+b+c} = 100$$

畳み込み:空間 VS 周波数

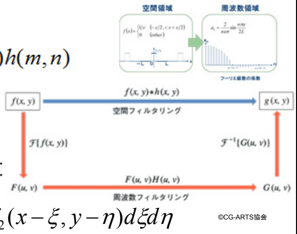
- 線形フィルタ(畳みこみ和):

$$g(i,j)=\sum_{n=-w}^{w}\sum_{m=-w}^{w} f(i+m,j+n)h(m,n)$$

畳み込み積分の離散版.

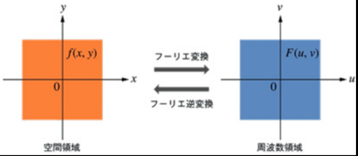
- 畳み込み積分(convolution):

$$f_1(x,y)*f_2(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi,\eta)f_2(x-\xi,y-\eta)d\xi d\eta$$

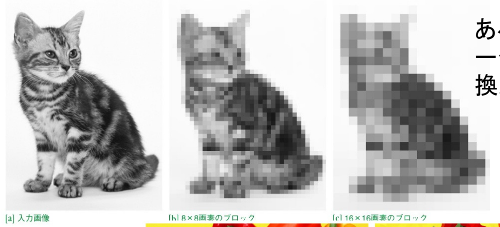


畳み込みは周波数領域では掛け算になる！

$$f*g=F^{-1}[F[f]F[g]]$$



モザイクフィルタ



[a] 入力画像 [b] 8×8画素のブロック [c] 16×16画素のブロック

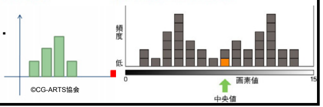
ある範囲を一色へ置き換える.

[a] 入力画像 [b] 処理結果

メディアン(中央値)フィルタ

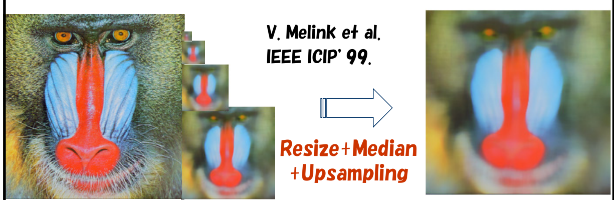
[a] 入力画像 [b] メディアンフィルタの結果 [c] 平均化フィルタの結果

- ある範囲の中央値に置換.
- 異常値を検出.
- エッジを(ある程度)保存.



Median Pyramid

- Block Median Pyramidal Transform: Cartoonish:
  - ResizeとUpsamplingは3次補間などを使う.
  - DownsamplingはMedianフィルタを使う.
  - エッジをある程度保存.



平均化フィルタ

[a] 入力画像 [b] 平均化フィルタ（3×3画素）の結果

ある範囲の平均.

[c] 平均化フィルタ（5×5画素）の結果

$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

[a] 3×3画素

$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$
$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$
$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$
$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$
$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$

[b] 5×5画素

©CG-ARTS協会

畳み込み:空間 VS 周波数2

$$h_{ave}(x,y)=\frac{1}{w^2}rect\left(\frac{x}{w},\frac{y}{w}\right)$$

$$H_{ave}(u,v)=\frac{\sin \pi wu}{\pi wu}\frac{\sin \pi wv}{\pi wv}$$

$$rect(x,y)=\begin{cases}1 & |x|\le\frac{1}{2}\text{かつ}|y|\le\frac{1}{2}\text{のとき}\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

平均化フィルタ

空間領域

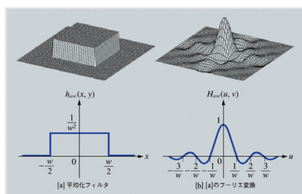
$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

[a] 3×3画素

$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$
$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$
$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$
$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$
$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$

[b] 5×5画素

周波数領域



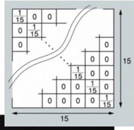
[a] 平均化フィルタ [b] [a]のフーリエ変換

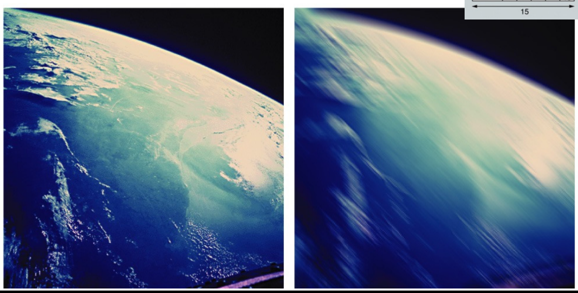
©CG-ARTS協会

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

Anisotropic(異方性)フィルタ

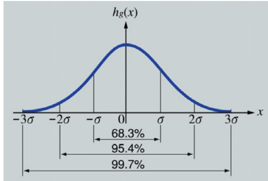
- ✓ カーネル画像をデザインする事により特定方向の重み付平均化を行える.

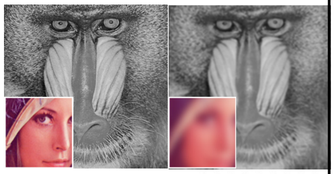




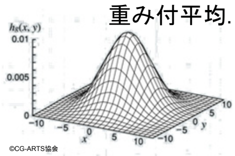
Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

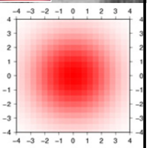
Gaussianフィルタ





Gauss関数の重み付平均.





$$g_\sigma(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)$$

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

Gaussianフィルタの性質

- ✓ フーリエ変換: $F[g_\sigma(x)]=F[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})](\varpi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{\varpi^2}{2}\sigma^2)$

Gaussianのフーリエ変換はGaussian: ただしsigmaは反比例.

周波数領域 暈け大

小さなsigma

空間領域 暈け小

暈け小

大きなsigma

暈け大

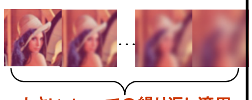
Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

Gaussianフィルタの性質2

- ✓ 繰り返し適用: Gaussianフィルタの繰り返し適用は異なるsigmaのGaussianフィルタ.

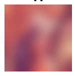
$$\boxed{g_\sigma(x)*(g_\sigma(x)*f(x))=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}g_{\sqrt{2}\sigma}(x)*f(x)}$$

$$g_\alpha(x)*(g_\beta(x)*f(x))=g_\beta(x)*(g_\alpha(x)*f(x))=(g_\beta(x)*g_\alpha(x))*f(x)$$
$$=F^{-1}[F[g_\beta(x)]F[g_\alpha(x)]]*f(x)$$
$$=F^{-1}[\frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{\varpi^2}{2}\alpha^2)\exp(-\frac{\varpi^2}{2}\beta^2)]*f(x)$$
$$=F^{-1}[\frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{\varpi^2}{2}(\alpha^2+\beta^2))]*f(x)$$
$$=\frac{1}{2\pi(\sqrt{\alpha^2+\beta^2})}\exp(-\frac{x^2}{2(\alpha^2+\beta^2)})*f(x)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}g_{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}(x)*f(x)$$



小さいsigmaでの繰り返し適用

||



大きいsigmaで1回適用

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

Gaussianフィルタの性質3

- ✓ 分離:

$$g_\sigma(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2})$$
$$=(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2}))(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(-\frac{y^2}{2\sigma^2}))$$
$$=g_\sigma(x)g_\sigma(y)$$

高次元のGaussianは低次元Gaussianの積.

- ✓ 異方性フィルタ: $x^2+y^2=|(0,0)-(x,y)|^2=|\mathbf{x}|^2,\quad \mathbf{x}=(x,y)^T$

$$\mathbf{x}^TA\mathbf{x}=(x,y)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Rightarrow g_\sigma(\mathbf{x})=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp(-\frac{\mathbf{x}^TA\mathbf{x}}{2\sigma^2})$$

$$\mathbf{x}^TA\mathbf{x}=(x,y)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\leftarrow A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \mathbf{x}^TA\mathbf{x}=x^2+y^2$$

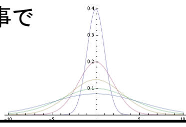
Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

Gaussianスケールスペース

- ✓ 異なるσでスムージングすると、様々なレベルでの画像.
- ✓ σを“スケール”として、「異なるスケールの画像」.
- ✓ Gaussianフィルタを繰り返し適用:

$$g_\sigma(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2})$$

- ✓ 世界は、スケールによって異なる構造をもつ、という考え方.
- ✓ σで偏微分する事でスケールの極値や変化率を図る.

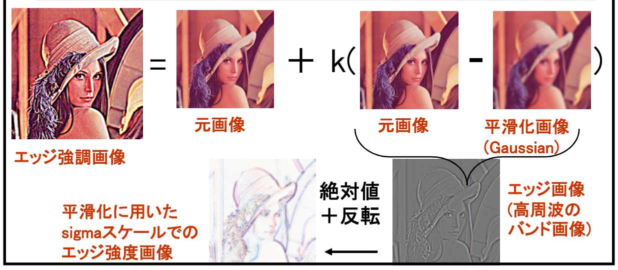


Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

エッジ強調フィルタ(空間領域)

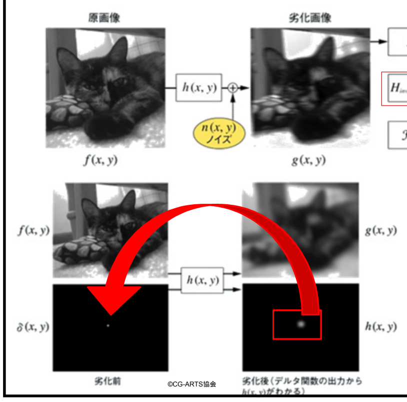
✓ 周波数領域でのエッジ強調フィルタと同様に空間領域でも、元画像＋k(元画像−平滑化画像)でエッジ強調画像を作成可能.

$$H_{h-emph}(u,v)=1+kH_{high}(u,v)=1+k(1-H_{low}(u,v))$$



Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

画像復元



劣化(暈けやノイズ)画像の復元
＝ノイズ除去.

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

Noise ?

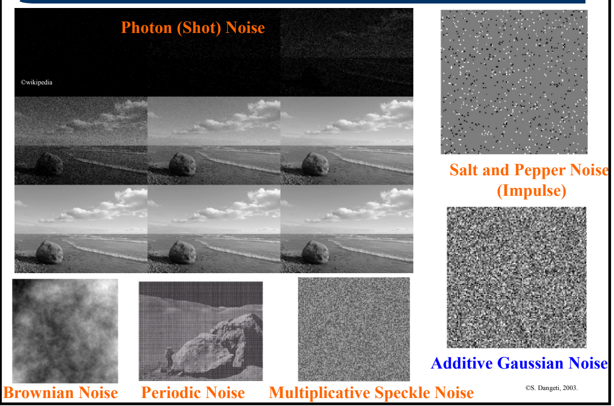
✓ 例えば加算ノイズモデル(Additive Noise Model):

$$I=g*f+n$$

True Signal: f 元信号 → Degradation Function: g e.g. PSF (観察・観測・測定装置による暈け) → ⊕ ← Noise: n → Observed Signal: I 得られる信号 → 復元フィルタ → Restorated Signal: $\hat{I}$ 復元信号

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

Noise ?



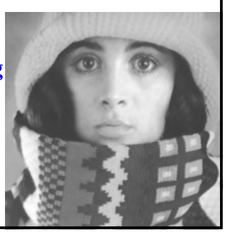
Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

Impulse Noise (Salt and Pepper)

p=0.01 p=0.05 p=0.1

Adaptive Median Filtering

R. C. Gonzalez
R. E. Woods
Digital Image Processing
pp. 332-333, 2008



Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

Adaptive Median Filter

✓ アルゴリズム:各画素で、外れ値を判別＋半径を増加.

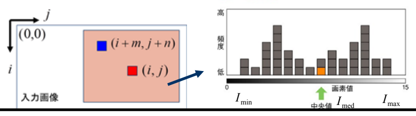
r: 局所Windowの半径
r_{max}: 半径の最大値
$I(x,y)$: 輝度値

A) Stage A:
1. : $A_1=I_{med}-I_{min}$
2. : $A_2=I_{med}-I_{max}$
3. : if $A_1>0\cap A_2<0$ goto Stage B.
4. : $r\leftarrow r+1$, if $r\le r_{max}$ goto A-1, else output I_{med}

B) Stage B:
1. : $B_1=I(x,y)-I_{min}$
2. : $B_2=I(x,y)-I_{max}$
3. if $B_1>0\cap B_2<0$ output $I(x,y)$ else output I_{med}

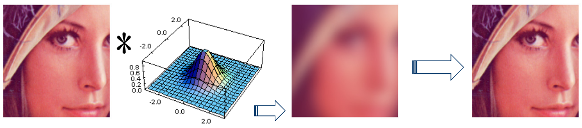
I_{med} の出力が外れ値だった場合.

局所Window内の
I_{med}: 中央値
I_{min}: 最小値
I_{max}: 最大値

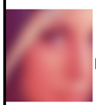


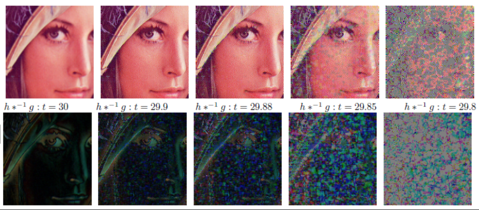
Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

Deconvolution(逆畳み込み)



Input * Degradation: Gaussian PSF: point spread function $I = f * g$ **Deconvoluved Output**



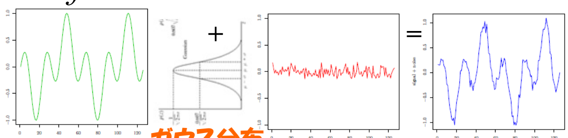


$$f = F^{-1}\left[\frac{F[I]}{F[g]}\right]$$

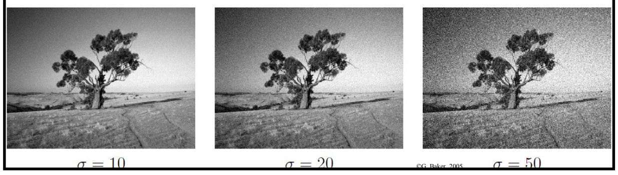
Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

加算性白色ガウスノイズ

$I = f + n$ 白色性:パワースペクトル(フーリエ変換の自己相関)が一定



f n I



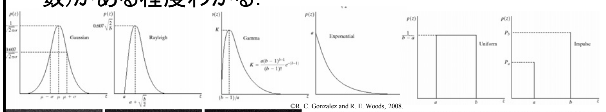
$\sigma = 10$ $\sigma = 20$ $\sigma = 50$

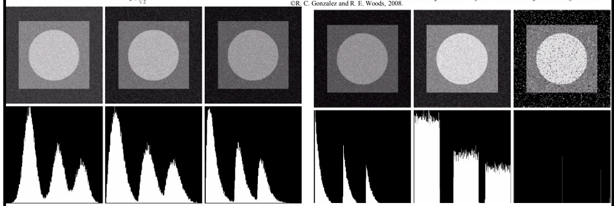
Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

Additive Noiseの確率密度関数

- ✓ 輝度値のヒストグラムの可視化で、加算ノイズの分布(確率密度関数)がある程度わかる.

$I = f + n$





Gaussian Rayleigh Gamma Exponential Uniform Impulse

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

Wiener Filter

- ✓ ノイズをn、観測信号をI、真の信号をfとして加算ノイズ:

$$I(t) = f(t) + n(t)$$

を考える. 最小二乗的に最適なフィルタをhとして、復元信号rとfの差の二乗を最小化する. $r(t) = h(t) * (f(t) + n(t))$

$$\mathrm{E(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} |r(t) - f(t)|^2 dt \to \min$$

fとnは無相関なので $\downarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(t)n(t)dt = 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(f+n) - f|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} (h^2 f^2 + 2h^2 fn + h^2 n^2 - 2f^2 h - 2fhn + f^2)dt = \int_{-\infty}^{\infty} (h^2 f^2 + h^2 n^2 - 2f^2 h + f^2)dt = \int_{-\infty}^{\infty} (f^2(1-h)^2 + h^2 n^2)dt$$

$$\frac{\partial}{\partial h} E(t) = 0 \Rightarrow -2f^2(1-h) + 2hn^2 = 0 \Rightarrow -f^2 + (f^2 + n^2)h = 0 \Rightarrow h = \frac{f^2}{f^2 + n^2}$$

$$F[h(t)] = \frac{F[f]^2}{F[f]^2 + F[n]^2} = \frac{1}{1 + F[n]^2 / F[f]^2}$$

通常は, fとnは不明なので, 適当な定数で近似.

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

Wiener Filter2

- ✓ ノイズをn、観測信号をI、真の信号をf、PSFをgとすると、

$$I(u,v) = g(u,v) * f(u,v) + n(u,v)$$

- ✓ 復元画像と原画像の誤差を最小にするような逆フィルターh(u,v)はPSFが無い場合と同様にして、

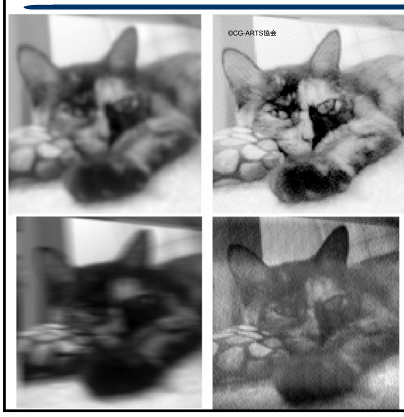
$$F[h(t)] = \frac{F[f]^2 F[g]}{F[f]^2 F[g]^2 + F[n]^2} = \frac{1}{F[g]} \frac{F[g]^2}{F[g]^2 + F[n]^2 / F[f]^2}$$

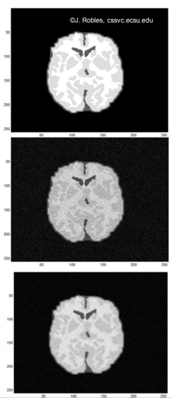
$$F[h(t)] = \frac{1}{F[g]} \frac{F[g]^2}{F[g]^2 + \Gamma}$$

通常は, fとnは不明なので, 適当な定数で近似: 単純な逆畳み込みと比べて、F[g]がゼロに近くても発散しない.

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

Wiener Filter2





Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

演習: 線形フィルタ

www.riken.jp/brict/Yoshizawa/Lectures/index.html

www.riken.jp/brict/Yoshizawa/Lectures/Lec18.pdf

www.riken.jp/brict/Yoshizawa/Lectures/Ex10.zip

- ✓演習18−1:平均化フィルタの作成.
- ✓演習18−2: 正規化Gaussianフィルタの作成.
- ✓演習18−3: エッジ強調フィルタの作成.

今日からはReport05の内容です。

Report04が出来ていない人も、演習18-1だけは先にやりましょう！

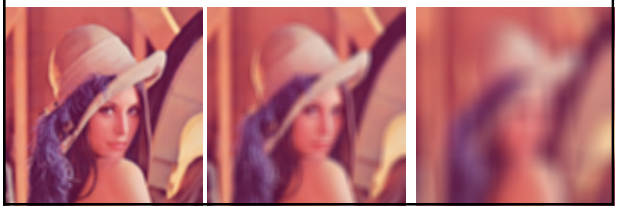
Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

演習18−1

- ✓ 平均化フィルタの作成: Ex10.zip内のAverageFilter.cxxの中にあるコメントに従って平均化フィルタを作成しましょう.
- ✓ カーネル画像(局所Window)のサイズをr=1, 5, 10で実行してみましょう.

カーネル画像(局所Window)のサイズ:(2r+1)x(2r+1)

11x11: r=5　21x21: r=10　61x61: r=30



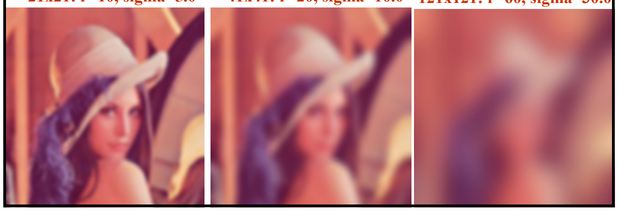
Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

演習18−2

- ✓ 正規化Gaussianフィルタの作成: Ex10.zip内のGaussianFilter.cxxの中にあるコメントに従って正規化Gaussianフィルタを作成しましょう.
- ✓ パラメータをr=5, sigma=2.5、及びr=10,sigma=5.0で実行してみましょう.

ガウス関数の標準偏差パラメータ: sigma

21x21: r=10, sigma=5.0　41x41: r=20, sigma=10.0　121x121: r=60, sigma=30.0



Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

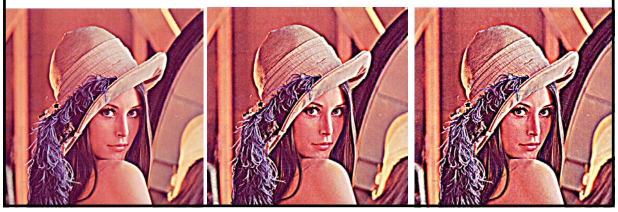
演習18−3

- ✓ エッジ強調フィルタ(＝元画像+k(元画像−平滑化画像))の作成: Ex10.zip内のEdgeEnhancementFilter.cxxの中にあるコメントに従ってエッジ強調フィルタを作成しましょう.
- ✓ パラメータr=10, sigma=5.0でk=1.5,3.0,5.0の三種類について実行してみてください.

エッジ強調の強度: k

21x21: r=10, sigma=5.0

k=1.5　k=3.0　k=5.0



Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

来週の予定

- ✓ フィルタ処理の続き＋第5回レポートの説明.

内容(5−8)：

フィルタ処理・エッジ強調

ノイズ除去、平滑化、画像復元、形態作用素、エッジ強調等.

1回	画像フォーマット
2回	周波数分解
3回	
4回	
5回	フィルタ処理・エッジ強調
6回	
7回	
8回	
9回	計算Photography・Artistic Stylization
10回	動画像処理
11回	
12回	
13回	
14回	エッジ・形状・特徴抽出とパターン認識の基礎＋補講
15回