

情報デザイン専攻

**画像情報処理論及び演習II**

**-フィルタ処理・エッジ強調-**  
**線形フィルタとノイズ**

第5回講義  
水曜日 1限  
教室6218

吉澤 信  
shin@riken.jp, 非常勤講師  
大妻女子大学 社会情報学部

独立行政法人  
**理化学研究所**

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

**今日の授業内容**

[www.riken.jp/briect/Yoshizawa/Lectures/index.html](http://www.riken.jp/briect/Yoshizawa/Lectures/index.html)  
[www.riken.jp/briect/Yoshizawa/Lectures/Lec18.pdf](http://www.riken.jp/briect/Yoshizawa/Lectures/Lec18.pdf)

- 線形フィルタの基礎.
- 画像復元の基礎.
- 演習: 線形フィルタ.

今日の演習は第2回(Report05)のレポートで出すので、  
みなさん頑張ってくださいねーp(^)q

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

**ノイズ除去・画像復元・フィルタリングの背景**

- 自然科学では観察・観測による画像解析が重要である.
- 測定・計測に基づくCAD/CAM/CAEも注目されている.

MRI    CT    構造光式表面形状スキャナー    レーザー式表面形状スキャナー

共焦点レーザー顕微鏡    高速レンジスキャナー

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

**重要: 線形フィルタ**

- 線形フィルタ(畳み込み和、Convolution):

$$I(i, j) = \sum_{m=-h_y}^{h_y} \sum_{n=-h_x}^{h_x} f(i+m, j+n)h(m, n)$$

$I$  出力画像     $f$  入力画像     $h$  カーネル画像: フィルタ

カーネル画像(局所Window)サイズ  $(2h_y + 1) \times (2h_x + 1)$

$(i, j)$  フィルタを適用している画素の座標値

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

**重要: 線形フィルタ**

- 線形フィルタ(畳み込み和、Convolution):

$$I(i, j) = \sum_{m=-h_y}^{h_y} \sum_{n=-h_x}^{h_x} f(i+m, j+n)h(m, n)$$

フィルタ  $h$     積和    入力画像  $f$     出力画像  $I$

✓  $f$ の重み付和 =  $f$ と $h$ の対応画素値の積和 = 線形フィルタ.

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

**Normalized Convolution**

- 正規化された畳み込み和:

$$I^{\text{new}}(\mathbf{x}) = \frac{\int Z(\mathbf{x}, \mathbf{y})I(\mathbf{y})d\mathbf{y}}{\int Z(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{y}}$$

$$I(i, j) = \frac{1}{W} \sum_{m=-h_y}^{h_y} \sum_{n=-h_x}^{h_x} f(i+m, j+n)h(m, n),$$

$$W = \sum_{m=-h_y}^{h_y} \sum_{n=-h_x}^{h_x} h(m, n)$$

重みの和が1のときPartition of Unityを満たすと言  
い、画像の輝度値が定数だった場合にフィルタ後の  
輝度値も同じ定数であることを保証する(constant  
reproductively) = 平均である.

$$\frac{a*100+b*100+c*100}{a+b+c} = 100$$

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

## 畳み込み: 空間 VS 周波数

✓ 線形フィルタ(畳みこみ和):

$$g(i, j) = \sum_{m=-W}^W \sum_{n=-W}^W f(i+m, j+n)h(m, n)$$

畳み込み積分の離散版.

✓ 畳み込み積分(convolution):

$$f_1(x, y) * f_2(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi, \eta) f_2(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta$$

畳み込みは周波数領域では掛け算になる!

$$f * g = F^{-1}[F[f]F[g]]$$

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

## モザイクフィルタ

ある範囲を一色へ置き換える.

(a) 入力画像 (b) 8×8画素のブロック (c) 16×16画素のブロック (d) 入力画像 (e) 処理結果

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

## メディアン(中央値)フィルタ

(a) 入力画像 (b) メディアンフィルタの結果 (c) 平均化フィルタの結果

✓ ある範囲の中央値に置換.  
 ✓ 異常値を検出.  
 ✓ エッジを(ある程度)保存.

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

## Median Pyramid

✓ Block Median Pyramidal Transform: **Cartoonish**:

- ResizeとUpsamplingは3次補間などを使う.
- DownsamplingはMedianフィルタを使う.
- エッジをある程度保存.

V. Melink et al. IEEE ICIP' 99.

Resize+Median+Upsampling

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

## 平均化フィルタ

ある範囲の平均.

(a) 入力画像 (b) 平均化フィルタ(3×3画素)の結果 (c) 平均化フィルタ(5×5画素)の結果

(a) 3×3画素 (b) 5×5画素

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

## 畳み込み: 空間 VS 周波数2

$$h_{ave}(x, y) = \frac{1}{w^2} \text{rect}\left(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}\right) \quad H_{ave}(u, v) = \frac{\sin \pi w u}{\pi w u} \frac{\sin \pi w v}{\pi w v}$$

$$\text{rect}(x, y) = \begin{cases} 1 & |x| \leq \frac{1}{2} \text{かつ} |y| \leq \frac{1}{2} \text{のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

平均化フィルタ

空間領域

周波数領域

(a) 3×3画素 (b) 5×5画素 (c) 平均化フィルタ (d) 平均化フィルタ (e) 平均化フィルタ (f) 平均化フィルタ

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

## Anisotropic(異方性)フィルタ

✓ カーネル画像をデザインする事により特定方向の重み付平均化を行える。

CCG-ARTS発表

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

## Gaussianフィルタ

Gauss関数の重み付平均.

$$g_{\sigma}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right)$$

CCG-ARTS発表

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

## Gaussianフィルタの性質

✓ フーリエ変換:  $F[g_{\sigma}(x)] = F\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\right](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2}\sigma^2\right)$

Gaussianのフーリエ変換はGaussian: ただしsigmaは反比例.

周波数領域 暈け大

小さなsigma

空間領域 暈け小

大きなsigma

暈け大

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

## Gaussianフィルタの性質2

✓ 繰り返し適用: Gaussianフィルタの繰り返し適用は異なるsigmaのGaussianフィルタ.

$$g_{\sigma}(x) * (g_{\sigma}(x) * f(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} g_{\sqrt{2}\sigma}(x) * f(x)$$

$$g_{\alpha}(x) * (g_{\beta}(x) * f(x)) = g_{\beta}(x) * (g_{\alpha}(x) * f(x)) = (g_{\beta}(x) * g_{\alpha}(x)) * f(x)$$

$$= F^{-1}[F[g_{\beta}(x)]F[g_{\alpha}(x)]] * f(x)$$

$$= F^{-1}\left[\frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2}\alpha^2\right) \exp\left(-\frac{\omega^2}{2}\beta^2\right)\right] * f(x)$$

$$= F^{-1}\left[\frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2}(\alpha^2 + \beta^2)\right)\right] * f(x)$$

$$= \frac{1}{2\pi(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2})} \exp\left(-\frac{x^2}{2(\alpha^2 + \beta^2)}\right) * f(x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} g_{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}(x) * f(x)$$

小さいsigmaでの繰り返し適用

大きいsigmaで1回適用

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

## Gaussianフィルタの性質3

✓ 分離:  $g_{\sigma}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right)$

高次元のGaussianは低次元Gaussianの積.

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)\right) = g_{\sigma}(x)g_{\sigma}(y)$$

✓ 異方性フィルタ:  $x^2 + y^2 = |(0,0) - (x,y)|^2 = |\mathbf{x}|^2, \quad \mathbf{x} = (x,y)^T$

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = (x,y) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow g_{\sigma}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}^T A \mathbf{x}}{2\sigma^2}\right)$$

✓ カーネル画像をデザインする事により特定方向の重み付平均化を行える.

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = (x,y) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leftarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = x^2 + y^2$$

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

## Gaussianスケールスペース

✓ 異なるσでスムージングすると、様々なレベルでの画像.

✓ σを「スケール」として、「異なるスケールの画像」.

✓ Gaussianフィルタを繰り返し適用:

$$g_{\sigma}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right)$$

✓ 世界は、スケールによって異なる構造をもつ、という考え方.

✓ σで偏微分する事でスケールの極値や変化率を図る.

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

### エッジ強調フィルタ(空間領域)

✓ 周波数領域でのエッジ強調フィルタと同様に空間領域でも、元画像+k(元画像-平滑化画像)でエッジ強調画像を作成可能。

$$H_{h-emph}(u,v) = 1 + kH_{high}(u,v) = 1 + k(1 - H_{low}(u,v))$$

元画像 + k(元画像 - 平滑化画像 (Gaussian)) = エッジ強調画像

平滑化に用いた sigma スケールでの エッジ強度画像

絶対値 + 反転

エッジ画像 (高周波のバンド画像)

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

### 画像復元

劣化(暈けやノイズ) 画像の復元 = ノイズ除去。

劣化前 (f(x,y)) → 劣化 (g(x,y)) → 復元 (f-hat(x,y))

劣化後 (デルタ関数の出力から h(x,y) がわかる)

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

### Noise ?

✓ 例えば加算ノイズモデル(Additive Noise Model):

$$I = g * f + n$$

True Signal:  $f$  (元信号) → Degradation Function:  $g$  (e.g. PSF) → Observed Signal:  $I$  (得られる信号)

観察・観測・測定装置による暈け

Noise:  $n$

Restored Signal:  $\hat{I}$  (復元信号) ← 復元フィルタ

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

### Noise ?

Photon (Shot) Noise

Salt and Pepper Noise (Impulse)

Additive Gaussian Noise

Brownian Noise Periodic Noise Multiplicative Speckle Noise

CS: Dengel, 2003.

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

### Impulse Noise (Salt and Pepper)

p=0.01 p=0.05 p=0.1

### Adaptive Median Filtering

R. C. Gonzalez  
R. E. Woods  
Digital Image Processing  
pp. 332-333, 2008

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

### Adaptive Median Filterer

✓ アルゴリズム:各画素で、外れ値を判別+半径を増加。

A) Stage A:

- $A_1 = I_{med} - I_{min}$
- $A_2 = I_{med} - I_{max}$
- if  $A_1 > 0 \cap A_2 < 0$  goto Stage B.
- $r \leftarrow r + 1$ , if  $r \leq r_{max}$  goto A-1, else output  $I_{med}$

B) Stage B:

- $B_1 = I(x,y) - I_{min}$
- $B_2 = I(x,y) - I_{max}$
- if  $B_1 > 0 \cap B_2 < 0$  output  $I(x,y)$  else output  $I_{med}$

$r$ : 局所Windowの半径  
 $r_{max}$ : 半径の最大値  
 $I(x,y)$ : 輝度値

局所Window内の  
 $I_{med}$ : 中央値  
 $I_{min}$ : 最小値  
 $I_{max}$ : 最大値

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

### Deconvolution (逆畳み込み)

**Input** \* **Degradation: Gaussian PSF: point spread function**  $I = f * g$  **Deconvolved Output**

$f = F^{-1} \left[ \frac{F[I]}{F[g]} \right]$

$h *^{-1} g : t = 30$   $h *^{-1} g : t = 29.9$   $h *^{-1} g : t = 29.88$   $h *^{-1} g : t = 29.85$   $h *^{-1} g : t = 29.8$

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

### 加算性白色ガウスノイズ

白色性: パワースペクトル(フーリエ変換の自己相関)が一定

$$I = f + n$$

**f** **n** **I**

**ガウス分布**

$\sigma = 10$   $\sigma = 20$   $\sigma = 50$

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

### Additive Noiseの確率密度関数

✓ 輝度値のヒストグラムの可視化で、加算ノイズの分布(確率密度関数)がある程度わかる。

$I = f + n$

Gaussian Rayleigh Gamma Exponential Uniform Impulse

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

### Wiener Filter

✓ ノイズをn、観測信号をI、真の信号をfとして加算ノイズ:

$$I(t) = f(t) + n(t)$$

を考える。最小二乗的に最適なフィルタをhとして、復元信号rとfの差の二乗を最小化する。  $r(t) = h(t) * (f(t) + n(t))$

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |r(t) - f(t)|^2 dt \rightarrow \min$$

fとnは無相関なので  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)n(t) dt = 0$

$$\frac{\partial}{\partial h} E(t) = 0 \Rightarrow -2f^2(1-h) + 2hn^2 = 0 \Rightarrow -f^2 + (f^2 + n^2)h = 0 \Rightarrow h = \frac{f^2}{f^2 + n^2}$$

$$F[h(t)] = \frac{F[f]^2}{F[f]^2 + F[n]^2} = \frac{1}{1 + F[n]^2 / F[f]^2}$$

通常は、f,nは不明なので、適当な定数で近似。

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

### Wiener Filter2

✓ ノイズをn、観測信号をI、真の信号をf、PSFをgとすると、

$$I(u, v) = g(u, v) * f(u, v) + n(u, v)$$

✓ 復元画像と原画像の誤差を最小にするような逆フィルタ  $h(u, v)$  はPSFが無い場合と同様にして、

$$F[h(t)] = \frac{F[f]^2 F[g]}{F[f]^2 F[g]^2 + F[n]^2} = \frac{1}{F[g] F[g]^2 + F[n]^2 / F[f]^2}$$

$$F[h(t)] = \frac{1}{F[g] F[g]^2 + \Gamma}$$

通常は、f,nは不明なので、適当な定数で近似: 単純な逆畳み込みと比べて、F[g]がゼロに近くても発散しない。

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

### Wiener Filter2

CC-BY-SA 4.0

© J. Rottler, cs.cmc.eccu.edu

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

## 演習: 線形フィルタ

www.riken.jp/brict/Yoshizawa/Lectures/index.html  
www.riken.jp/brict/Yoshizawa/Lectures/Lec18.pdf

www.riken.jp/brict/Yoshizawa/Lectures/Ex10.zip

- ✓ 演習18-1: 平均化フィルタの作成.
- ✓ 演習18-2: 正規化Gaussianフィルタの作成.
- ✓ 演習18-3: エッジ強調フィルタの作成.

今日からはReport05の内容です。  
Report04が出来ていない人も、演習18-1だけは先にやりましょう!

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

## 演習18-1

- ✓ 平均化フィルタの作成: Ex10.zip内のAverageFilter.cxxの中にあるコメントに従って平均化フィルタを作成しましょう.
- ✓ カーネル画像(局所Window)のサイズを $r=1, 5, 10$ で実行してみましょう.

カーネル画像(局所Window)のサイズ:  $(2r+1) \times (2r+1)$

11x11:  $r=5$       21x21:  $r=10$       61x61:  $r=30$

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

## 演習18-2

- ✓ 正規化Gaussianフィルタの作成: Ex10.zip内のGaussianFilter.cxxの中にあるコメントに従って正規化Gaussianフィルタを作成しましょう.
- ✓ パラメータを $r=5, \sigma=2.5$ , 及び $r=10, \sigma=5.0$ で実行してみましょう.

ガウス関数の標準偏差パラメータ:  $\sigma$

21x21:  $r=10, \sigma=5.0$     41x41:  $r=20, \sigma=10.0$     121x121:  $r=60, \sigma=30.0$

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

## 演習18-3

- ✓ エッジ強調フィルタ(=元画像+k(元画像-平滑化画像))の作成: Ex10.zip内のEdgeEnhancementFilter.cxxの中にあるコメントに従ってエッジ強調フィルタを作成しましょう.
- ✓ パラメータ $r=10, \sigma=5.0$ で $k=1.5, 3.0, 5.0$ の三種類について実行してみてください.

エッジ強調の強度:  $k$

$k=1.5$       21x21:  $r=10, \sigma=5.0$        $k=3.0$        $k=5.0$

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

## 来週の予定

- ✓ フィルタ処理の続き + 第5回レポートの説明.

内容(5-8):  
フィルタ処理・エッジ強調  
ノイズ除去、平滑化、画像復元、  
形態作用素、エッジ強調等.

1回	画像フォーマット
2回	周波数分解
3回	
4回	
5回	
6回	フィルタ処理・エッジ強調
7回	
8回	
9回	計算Photography・Artistic Stylization
10回	
11回	動画処理
12回	
13回	
14回	エッジ・形状・特徴抽出とパターン認識の基礎 + 補講
15回	