情報デザイン専攻

画像情報処理論及び演習II

－フィルタ処理・エッジ強調－
差分法・変分法と平滑化・エッジ

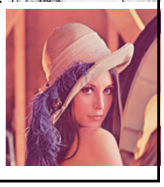
第6回講義
水曜日１限
教室6218

吉澤　信
shin@riken.jp, 非常勤講師
大妻女子大学　社会情報学部
独立行政法人 理化学研究所

今日の授業内容

www.riken.jp/brict/Yoshizawa/Lectures/index.html
www.riken.jp/brict/Yoshizawa/Lectures/Lec18.pdf

1. 前回の復習/演習.
2. 勾配とエッジの基礎：差分法.
3. Laplacianと拡散方程式の基礎:変分法.
4. 演習：エッジ強度抽出と拡散方程式.



今日の演習は第6回のレポートで出すので、
みなさん頑張ってくださいねーp(^^)q

復習：勾配(Gradient)

✓ 勾配(Gradient): スカラー場の各点で変化が最大の方向と変化率を大きさに持つベクトル場.

✓ 勾配作用素: $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$

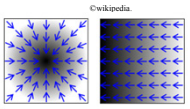
✓ 勾配ベクトルの表記：

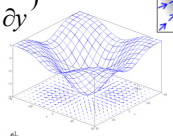
$$\nabla I = \nabla I(x,y) = (\frac{\partial I}{\partial x}, \frac{\partial I}{\partial y})$$

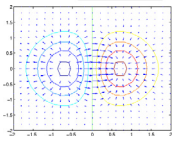
$$= (\frac{\partial I(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial I(x,y)}{\partial y}) = (I_x, I_y).$$

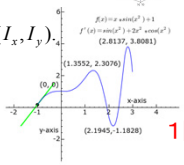
✓ エッジの大きさ＝勾配の大きさ:

$$\|\nabla I\| = \sqrt{I_x^2 + I_y^2}$$







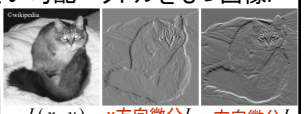


1階微分は接線、傾き.

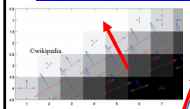
重要：画像のエッジ

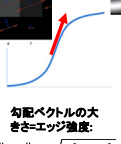
✓ 画像の勾配: 画像を高さ関数と考えたときの勾配ベクトル場、画像のエッジ部分で大きい勾配ベクトルをもつ画像.

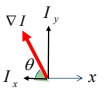
✓ 勾配ベクトルの方向: 画像エッジと垂直な方向.



$I(x,y)$　x方向微分I_x　y方向微分I_y







勾配ベクトルの大きさ=エッジ強度:

$$\|\nabla I\| = \sqrt{I_x^2 + I_y^2}$$

$$\theta = \arctan(I_y / I_x)$$

入力 $I(x,y)$

エッジ強度画像 $\|\nabla I(x,y)\|$

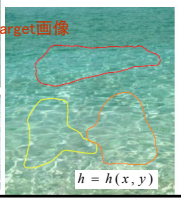
復習：Laplacian、Laplace-Poisson方程式

✓ ラプラス作用素(Laplacian): 滑らかさを記述.

$$\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \qquad \Delta I = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}$$

✓ Laplace方程式：自然科学の多くの分野で重要.　$\Delta I = 0$

✓ Poisson方程式: Laplace方程式の右辺が関数.　$\Delta I = g$

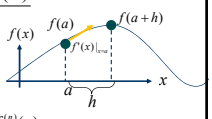


©J. Sun et al. SIGGRAPH 2004.

Poisson方程式を解く！

微分(導関数)の近似：差分法

✓ 微分の定義：$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$　　1階微分は接線



✓ テーラー展開：

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(b-a)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)(b-a)^{n-1} + \frac{1}{n!}f^{n}(c)(b-a)^{n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \quad a < c < b.$$

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2!}f''(x)h^2 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)h^{n-1}$$

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h + O(h^2) \Rightarrow f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h^2)$$

2次以降の項で打ち切ると…　　誤差はhの2乗に比例: $O(h^2)$

✓ 1階微分の前進1次差分近似、後退1次差分近似：

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x) \approx \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} \qquad \frac{\partial}{\partial x}f(x) \approx \frac{f(x) - f(x-\varepsilon)}{\varepsilon} \quad \Leftarrow h = -\varepsilon$$

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

微分(導関数)の近似:差分法2

- ✓ 高階微分の近似はより多くの評価点が必要: 例えば2階微分の前進1次差分近似:

1階の前進1次差分近似

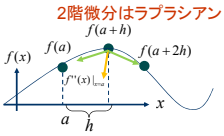
$$f''(x)=\frac{d}{dx}f'(x)\approx\frac{d}{dx}\left(\overbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+O(h^2)}\right)\approx\frac{f(x+2h)-f(x+h)}{h^2}-\frac{f(x+h)-f(x)}{h^2}+O(h^2)$$

$$f''(x)\approx\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}+O(h^2)$$

誤差はhの2乗に比例: $O(h^2)$

- ✓ 1次精度の差分近似はn階の微分をn+1の評価点で近似する.
- ✓ 同様にn次精度の差分近似は1階の微分をn+1の評価点で近似する(次のスライド).

2階微分はラプラシアン



Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

微分(導関数)の近似:差分法3

- ✓ 高次の近似もより多くの評価点が必要:例えば1階微分の前進2次差分近似:

$$f(x+h)\approx f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2!}f''(x)h^2+O(h^3)\Rightarrow f'(x)\approx\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{1}{2!}f''(x)h+O(h^3)$$

代入

1階の前進1次差分近似

$$f''(x)=\frac{d}{dx}f'(x)\approx\frac{d}{dx}\left(\overbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+O(h^2)}\right)\approx\underbrace{\frac{f(x+2h)-f(x+h)}{h^2}-\frac{f(x+h)-f(x)}{h^2}+O(h^2)}_{\text{2階の前進1次差分近似}}$$

$$f'(x)\approx\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{1}{2!}\left(\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h}\right)+\frac{1}{2!}O(h^2)h+O(h^3)$$

注目！hの2乗の誤差がhの3乗の誤差になる！

$$f'(x)\approx\frac{-f(x+2h)+4f(x+h)-3f(x)}{2h}+O(h^3)$$

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

微分(導関数)の近似:差分法4

- ✓ 2階の微分の前進1次差分: $f''(x)\approx\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}+O(h^2)$
- ✓ 中心差分を使うと、評価点の数は同じで、より高精度になる:例えば2階微分の中心2次差分近似:

$$\begin{cases}f(x+a)\approx f(x)+f'(x)a+\frac{1}{2!}f''(x)a^2+O(a^3)\\ f(x-b)\approx f(x)-f'(x)b+\frac{1}{2!}f''(x)b^2+O(b^3)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(x+a)/a\approx f(x)/a+f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)a+O(a^3)/a\\ f(x-b)/b\approx f(x)/b-f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)b+O(b^3)/b\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{bf(x+a)+af(x-b)}{ab}\approx\frac{(a+b)f(x)}{ab}+\frac{(a+b)f''(x)}{2}$$

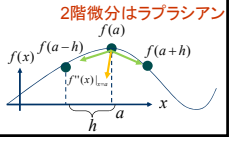
$$\Rightarrow f''(x)\approx\frac{2bf(x+a)-2(a+b)f(x)+2af(x-b)}{ab(a+b)}+O(a^3,b^3)$$

←微小距離が異なるときの中心差分近似

$$f''(x)\approx\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}+O(h^3)$$

誤差はhの3乗に比例: $O(h^3)$ $\uparrow a=b=h$

2階微分はラプラシアン



Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

GradientとLaplacianの離散化(差分近似)

$$\nabla I=\left(\frac{\partial I}{\partial x},\frac{\partial I}{\partial y}\right)\qquad\Delta I=\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 I}{\partial y^2}$$

- ✓ 1次精度前進: 数学的にはh<<1だが、画像などはh=1を良く使う.

$$\nabla I\approx(I(x+1,y)-I(x,y),I(x,y+1)-I(x,y))$$

$$\Delta I\approx I(x+2,y)-2I(x+1,y)+2I(x,y)+I(x,y+2)-2I(x,y+1)$$

- ✓ 2次精度中心:画像ではこれが基本.

$$\nabla I\approx\left(\frac{I(x+1,y)-I(x-1,y)}{2},\frac{I(x,y+1)-I(x,y-1)}{2}\right)$$

$$\Delta I\approx I(x+1,y)+I(x-1,y)+I(x,y+1)+I(x,y-1)-4I(x,y)$$

$$\Delta f(\mathbf{x})\approx\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_i+h_i)-2f(x_i)+f(x_i-h_i)}{h_i^2}+O(h^3)\qquad\Delta f=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}f+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\ldots+f\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}f$$

$$\mathbf{x}=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$$

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

GradientとLaplacianの離散化(差分近似)2

- ✓ 下記1階微分の中心差分近似の分母になぜ2が出てくるのかは、2階微分の中心差分と同様に計算するとわかる.

$$\nabla I\approx\left(\frac{I(x+1,y)-I(x-1,y)}{2},\frac{I(x,y+1)-I(x,y-1)}{2}\right)$$

$$\begin{cases}f(x+a)\approx f(x)+f'(x)a+\frac{1}{2!}f''(x)a^2+O(a^3)\\ f(x-b)\approx f(x)-f'(x)b+\frac{1}{2!}f''(x)b^2+O(b^3)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(x+a)/a^2\approx f(x)/a^2+f'(x)/a+\frac{1}{2}f''(x)+O(a^3)/a^2\\ f(x-b)/b^2\approx f(x)/b^2-f'(x)/b+\frac{1}{2}f''(x)+O(b^3)/b^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{b^2f(x+a)-a^2f(x-b)}{a^2b^2}\approx\frac{(b^2-a^2)f(x)}{a^2b^2}+\frac{(a+b)f'(x)}{ab}$$

$$\Rightarrow f'(x)\approx\frac{b^2(f(x+a)-f(x))+a^2(f(x)-f(x-b))}{ab(a+b)}+O(a^3,b^3)$$

$$\Rightarrow f'(x)\approx\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

$$\uparrow a=b=h$$

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

画像では3x3の作用素(オペレータ)

0	0	0
0	−1	1
0	0	0

前進1次

0	0	0
−1	1	0
0	0	0

後退1次

0	0	0
$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
0	0	0

中心2次

0	1	0
0	−1	0
0	0	0

前進1次

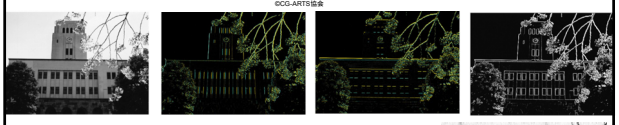
0	0	0
0	1	0
0	−1	0

後退1次

0	$\frac{1}{2}$	0
0	0	0
0	$-\frac{1}{2}$	0

中心2次

©CG-ARTS協会



- ✓ 微分フィルタはエッジを検出できるが, ノイズに対しても敏感.
- ✓ ノイズを抑えながらエッジ抽出:
  - ✓ 微分と平滑化の組み合わせ.
  - ✓ 横と縦の組み合わせ.

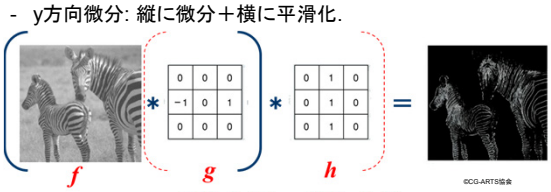
エッジ強度画像を白をエッジとするか、黒をエッジとするかは、表現の違い.

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

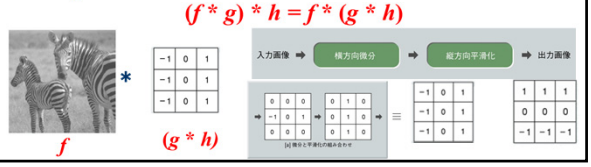
微分と平滑化オペレータの合成

✓ プリューウィットオペレータ:
- x方向微分:横に微分＋縦に平滑化.
- y方向微分: 縦に微分＋横に平滑化.

＊:畳み込み



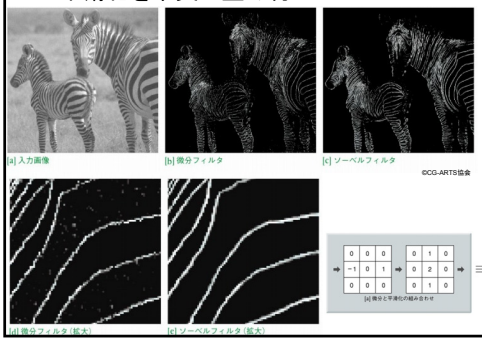
$$(f * g) * h = f * (g * h)$$



Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

重要:ソーベルオペレータ

✓ 最もよく使われている一階の偏微分オペレータ:
- 平滑化を中央に重み付.

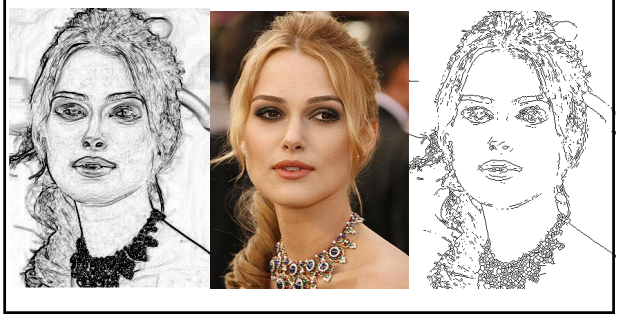


Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

勾配の細線化による線検出

✓ 勾配強度画像を細線化してもエッジ検出が可能.

$$\|\nabla I\| = \sqrt{I_x^2 + I_y^2}$$



Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

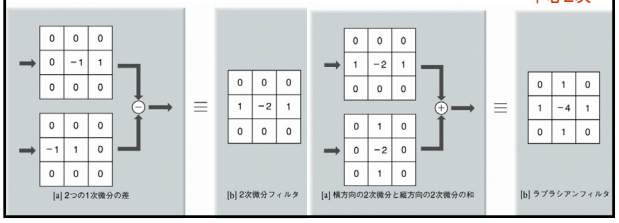
2階微分オペレータ(Laplacian)

✓ 2次の中心差分でLaplaceオペレータの4連結での近似:

$$\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\Delta I \approx I(x+1,y) + I(x-1,y) + I(x,y+1) + I(x,y-1) - 4I(x,y)$$

中心2次



Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

2階微分オペレータ(Laplacian)2

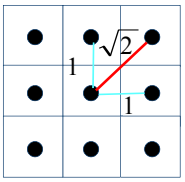
✓ 8連結では？

$$\Delta f(\mathbf{x}) \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i + h_i) - 2f(x_i) + f(x_i - h_i)}{h_i^2} + O(h^3)$$

$$\Delta I \approx I(x+1,y) + I(x-1,y) + I(x,y+1) + I(x,y-1) - 6I(x,y) + \\ + 0.5(I(x+1,y+1) + I(x-1,y+1) + I(x+1,y-1) + I(x-1,y-1))$$

0.5	1	0.5
1	− 6	1
0.5	1	0.5

中心2次8連結



上下左右のhは1、

斜めのhは

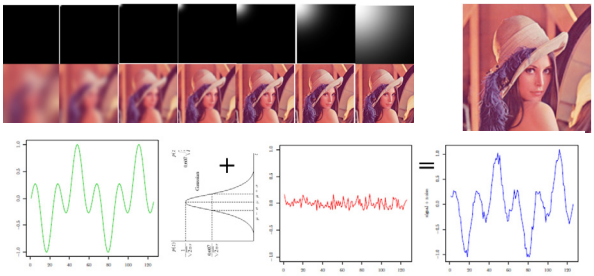
$$h = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{h^2} = 0.5$$

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

重要:平滑化とエッジ

✓ 平滑化(滑らかにする事)の意味は？
✓ 前回の講義でやったノイズと何の関係があるの？
✓ 前々回の周波数分解との関係は？

平滑化・Low Path→ノイズの除去・エッジの削除



変分法

- ✓ 変分法(Variational Calculus): 極小、極大を汎関数で停留条件を満たす様に求め、対応する偏微分方程式を導出.
- ✓ 汎関数(functional): 関数の関数.

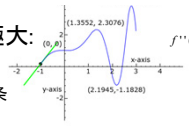
Euler-Lagrange方程式

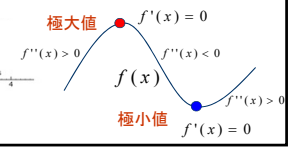
例(エッジ強度の積分): $E(I(x,y)) = \frac{1}{2}\iint_\Omega \|\nabla I\|^2 dxdy$

- ✓ 停留条件:第一変分がゼロ(関数での1階微分がゼロ).

$$E(u(x,y)) = \iint_\Omega F(x,y,u,u_x,u_y)dxdy \Rightarrow \min \Leftarrow \delta E = 0$$

- ✓ 復習:極小、極大:
  - 最小:ルジャンドル条件などの二回微分.





変分法2

$$E(u(x,y)) = \iint_\Omega F(x,y,u,u_x,u_y)dxdy \Rightarrow \min \Leftarrow \delta E = 0$$

摂動(微小変化)した比較関数で置き換え、その偏微分をゼロとする: $U(x,y,\alpha) = u(x,y) + \alpha\eta(x,y)$

積分の領域: Ω の境界曲線 $\partial\Omega$ では $\eta(x,y) = 0$ とする.

$$E(U(x,y)) = \iint_\Omega F(x,y,U,U_x,U_y)dxdy = \iint_\Omega F(x,y,u+\alpha\eta,u_x+\alpha\eta_x,u_y+\alpha\eta_y)dxdy$$

$$\delta E = \frac{\partial}{\partial\alpha}E(u+\alpha\eta)\Big|_{\alpha=0} = \iint_\Omega \frac{\partial}{\partial\alpha}F(x,y,U,U_x,U_y)dxdy\Big|_{\alpha=0}$$

↑第一変分

$$= \iint_\Omega \left(\frac{\partial F}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial\alpha} + \frac{\partial F}{\partial U_x}\frac{\partial U_x}{\partial\alpha} + \frac{\partial F}{\partial U_y}\frac{\partial U_y}{\partial\alpha}\right)\Big|_{\alpha=0} dxdy$$

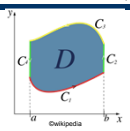
←全微分

$$= \iint_\Omega \left(\frac{\partial F}{\partial u}\eta + \frac{\partial F}{\partial u_x}\eta_x + \frac{\partial F}{\partial u_y}\eta_y\right)dxdy$$

変分法3

- ✓ 準備:

グリーンの定理→



$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial u_x}\eta_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial F}{\partial u_x}\right) - \eta\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_x} \\ \frac{\partial F}{\partial u_y}\eta_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\frac{\partial F}{\partial u_y}\right) - \eta\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u_y} \end{cases}$$

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\eta_x + \frac{\partial F}{\partial u_y}\eta_y\right)dxdy$$

$$= \iint_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial F}{\partial u_x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)\right)dxdy - \iint_\Omega \eta\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)dxdy$$

$$\iint_\Omega \eta\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)dxdy = \int_{\partial\Omega}\eta\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}dy + \frac{\partial F}{\partial u_y}dx\right) = 0$$

←グリーンの定理:面積分を線積分に変換.

積分の定義域: Ω の境界曲線 $\partial\Omega$ では $\eta(x,y) = 0$ なので.

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\eta_x + \frac{\partial F}{\partial u_y}\eta_y\right)dxdy = -\iint_\Omega \eta\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)dxdy$$

変分法4

$$\delta E = \iint_\Omega \left(\frac{\partial F}{\partial u}\eta + \frac{\partial F}{\partial u_x}\eta_x + \frac{\partial F}{\partial u_y}\eta_y\right)dxdy$$

$$= \iint_\Omega \eta\left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)\right)dxdy$$

↑がゼロになるためには、下記偏微分方程式を満たす:

- ✓ 2変数で1階微分の汎関数に対する公式:

$$E(u(x,y)) = \iint_\Omega F(x,y,u,u_x,u_y)dxdy \Rightarrow \min$$

Euler-Lagrange方程式

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right) = 0$$

変分法5

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right) = 0$$

エッジ強度の積分エネルギーの場合は:

$$\frac{1}{2}\iint_\Omega \|\nabla I\|^2 dxdy \Rightarrow \min \qquad F = \frac{1}{2}\|\nabla I\|^2 = \frac{1}{2}(I_x^2 + I_y^2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial I} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial I_x} = I_x, \quad \frac{\partial F}{\partial I_y} = I_y$$

$$\frac{\partial F}{\partial I} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial I_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial I_y}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}I_x - \frac{\partial}{\partial y}I_y = -\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} = -\Delta I$$

つまり、Laplace方程式の解がエネルギーを最小化する:

$$\Delta I(x,y) = 0$$

変分法6

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right) = 0$$

例えば、Poisson方程式は:

$$\frac{1}{2}\iint_\Omega (\|\nabla I\|^2 + 2If(x,y))dxdy \Rightarrow \min \qquad F = \frac{1}{2}(I_x^2 + I_y^2 + 2If)$$

$$\frac{\partial F}{\partial I} = f, \quad \frac{\partial F}{\partial I_x} = I_x, \quad \frac{\partial F}{\partial I_y} = I_y$$

$$\frac{\partial F}{\partial I} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial I_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial I_y}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}I_x - \frac{\partial}{\partial y}I_y + f = -\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} + f = f - \Delta I$$

つまり、Poisson方程式の解がエネルギーを最小化する:

$$\Delta I(x,y) = f(x,y)$$

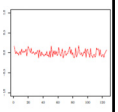
重要:変分法によるエネルギー最小化

- ✓ Laplace方程式はディリクレ・エネルギーを最小化する事で導かれ、その解は調和写像と呼ばれる.
- ✓ ディリクレ・エネルギー: 勾配の大きさを積分→エッジの大きさの和＝凹凸具合＝ノイズの大きさ.

$$\frac{1}{2}\iint_{\Omega} \|\nabla I\|^2 \, dxdy \quad \Rightarrow \quad \min$$

定義域: Ω

定義域境界: $\partial\Omega$



- ✓ 変分法によりLaplace方程式がディリクレ・エネルギーのEuler-Lagrange方程式として導かれる↓

$$\Delta I(x,y) = 0 \quad (x,y \in \Omega)$$

$$I(x,y) = g(x,y) \quad (x,y \in \partial\Omega)$$

境界条件: $g(x,y)$

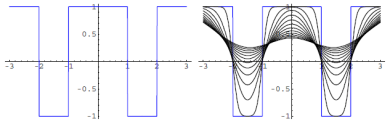
凹凸具合が最小化＝滑らかな(調和な)解＝平均化.

重要:拡散方程式

- ✓ ディリクレエネルギーの最小化過程は拡散方程式(熱伝導方程式)として記述出来る:
- ✓ 時間の変数を加えて関数(画像)を拡張しその時間方向への接線(時間変数での一階微分)が拡散のスピードになる.

$$\frac{\partial I(x,y,t)}{\partial t} = \Delta I(x,y,t)$$

- ✓ 拡散過程 $t \to \infty$は、時間の極限でLaplace方程式を満たす＝解は調和関数となる ($\Delta I = 0$).



例:クーラーを止めたら、温度は一定(又は周りの部屋の温度の平均)になる.

LaplacianとDoG、LoG

- ✓ LoG: Laplacian of Gaussian. $LoG_\sigma = \Delta g_\sigma(x,y)$
- ✓ DoG: Difference of Gaussian. $g_\sigma(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2})$

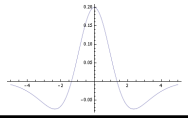
$$\frac{\partial I(x,y,t)}{\partial t} = \Delta I(x,y,t) \qquad L(x,y,\sigma) = g_\sigma(x,y) * I(x,y)$$

$$\sigma\Delta L(x,y,\sigma) = \frac{\partial L(x,y,\sigma)}{\partial\sigma} = \lim_{k\to 1}\frac{L(x,y,k\sigma)-L(x,y,\sigma)}{k\sigma-\sigma} \approx \frac{L(x,y,k\sigma)-L(x,y,\sigma)}{k\sigma-\sigma}$$

$$\sigma^2(1-k)LoG_\sigma * I(x,y) = \sigma^2(1-k)\Delta L(x,y,\sigma)$$

$$\approx (g_\sigma(x,y) - g_{k\sigma}(x,y)) * I(x,y) = DoG_\sigma * I(x,y)$$

$$DoG_\sigma(x,y) = g_\sigma(x,y) - g_{2\sigma}(x,y).$$

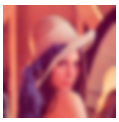


差分による拡散方程式の離散化

$$\frac{\partial I(x,y,t)}{\partial t} = \Delta I(x,y,t)$$

- ✓ 時間は、前進1次差分近似:epsilonは微小時間.

$$I^{n+1}(i,j) = I^n(i,j) + \varepsilon\Delta I^n(i,j)$$



＝

＋ ε

0	1	0
1	−4	1
0	1	0

4連結

- ✓ 空間は中心2次差分近似:

$$\Delta I \approx I(x+1,y) + I(x-1,y) + I(x,y+1) + I(x,y-1) - 4I(x,y)$$

$$\Delta I \approx I(x+1,y) + I(x-1,y) + I(x,y+1) + I(x,y-1) - 6I(x,y) + 0.5(I(x+1,y+1) + I(x-1,y+1) + I(x+1,y-1) + I(x-1,y-1))$$

0.5	1	0.5
1	−6	1
0.5	1	0.5

8連結

差分の陽解法と陰解法

- ✓ 陽解法は…

$$I^{n+1}(i,j) = I^n(i,j) + \varepsilon\Delta I^n(i,j)$$

- ✓ 陰解法は…

注目！

$$I^{n+1}(i,j) = I^n(i,j) + \varepsilon\Delta I^{n+1}(i,j)$$

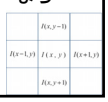
- ✓ 連立方程式となる:

$$(I - \varepsilon\Delta)I^{n+1}(i,j) = I^n(i,j) \Rightarrow I^{n+1}(i,j) = (I-\varepsilon\Delta)^{-1}I^n(i,j)$$

$$\Rightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

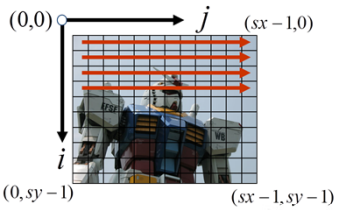
$$\Delta I \approx I(x+1,y) + I(x-1,y) + I(x,y+1) + I(x,y-1) - 4I(x,y)$$ なら

行列 A の対角成分は $1+\varepsilon 4$、非対角成分は、0か−1の疎な行列になる.



差分の陽解法と陰解法2

- ✓ 画像の各画素にIDをk=(i×sx+j)と与えると…



$k-sx-1$	$k-sx$	$k-sx+1$	$k-sx+2$
$k-1$	k	$k+1$	$k+2$
$k+sx-1$	$k+sx$	$k+sx+1$	$k+sx+2$
$k+2sx-1$	$k+2sx$	$k+2sx+1$	$k+2sx+2$

$$\Delta I \approx I(x+1,y) + I(x-1,y) + I(x,y+1) + I(x,y-1) - 4I(x,y)$$

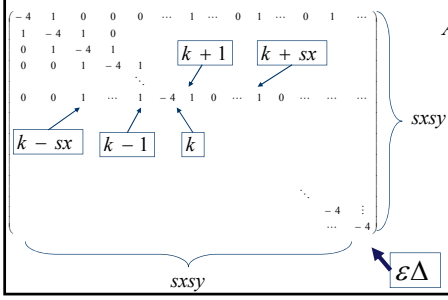
0	1	0
1	−4	1
0	1	0

は、 $I(k-1) + I(k-sx) + I(k+1) + I(k+sx) - 4I(k)$ となる、ここで、$sx \times sy$の行列を考える.

差分の陽解法と陰解法3

1行にはゼロでない要素が5つで対角成分が−4、それ以外は1: ラプラス行列とも呼ばれる.

$$\Delta I \approx I(k-1)+I(k-sx)+I(k+1)+I(k+sx)-4I(k)$$



$$A = (I - \varepsilon\Delta)$$

行列 A の対角成分は $1+\varepsilon 4$ 、非対角成分は、0か−1の疎な行列になる.

フィルタの繰り返し適用

✓ 陰解法では絶対安定だが、陽解法は微小時間epsilonが大きい値は解が不安定になる(クーラン条件). 演習では簡単の為陽解法を使う.

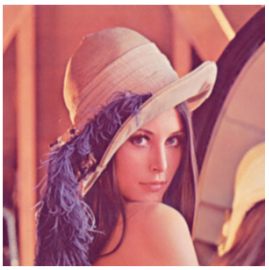
$$I^{n+1} = Filtering(I^n)$$

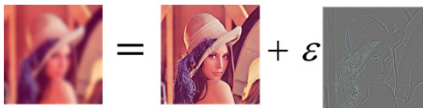
$$for(\text{iteration})\{$$

$$tmp = Filtering(I);$$

$$I = tmp;$$

$$\}$$

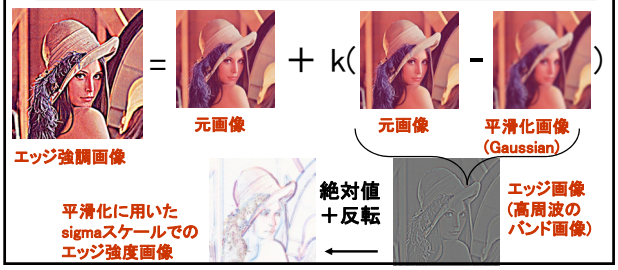




復習:エッジ強調フィルタ(空間領域)

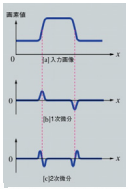
✓ 周波数領域でのエッジ強調フィルタと同様に空間領域でも、元画像＋k(元画像−平滑化画像)でエッジ強調画像を作成可能.

$$H_{h-emph}(u,v) = 1 + kH_{high}(u,v) = 1 + k(1 - H_{low}(u,v))$$



Laplacianオペレータによるエッジ強調

✓ Laplacianをたすと平滑化なので1から引いたオペレータは鮮鋭化(エッジ強調).

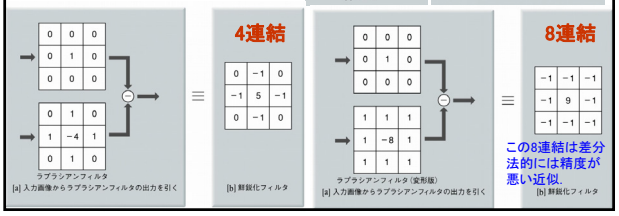


[a] から [c] を引くと

0	−k	0
−k	1+4k	−k
0	−k	0

−k	−k	−k
−k	1+8k	−k
−k	−k	−k

©CG-ARTS協会



Laplacianオペレータによるエッジ強調2

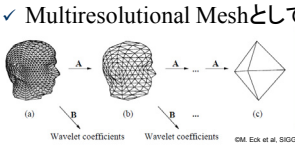
[a] 入力画像(グレースケール)　[b] 鮮鋭化フィルタの結果　©CG-ARTS協会

✓ 多重解像度解析などの周波数フィルタと原理は同じ.

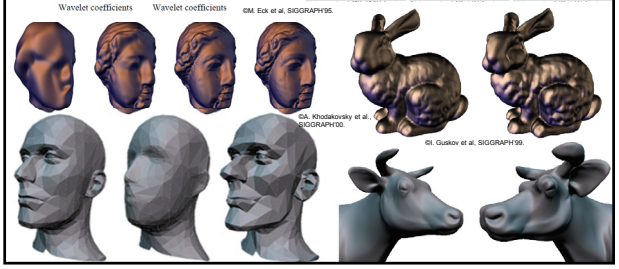
[a] 入力画像(カラー)　[b] 鮮鋭化フィルタの結果

Laplacianオペレータによるエッジ強調3

✓ Multiresolutional Meshとして3D形状への応用もある.



©M. Eck et al, SIGGRAPH'95.



©A. Khodakovsky et al., SIGGRAPH'00.

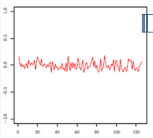
©I. Guskov et al, SIGGRAPH'99.

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

数理モデリング・解析の基本

問題・要求 ⇨ エネルギー (積分方程式) ⇨ 偏微分方程式

エネルギーを考える(設計). 変分法.



$$\frac{1}{2}\iint_{\Omega} \|\nabla I\|^2 \, dxdy \Rightarrow \min$$

エッジの大きさの和を最小化.

$$\frac{\partial I(x,y,t)}{\partial t} = \Delta I(x,y,t)$$

数値解法で実際に計算する.

ギザギザを滑らかにしたい: ノイズを細かいエッジと考えると…

$$I^{n+1}(i,j) = I^{n}(i,j) + \varepsilon \Delta I^{n}(i,j)$$

$$\Delta I \approx I(x+1,y) + I(x-1,y) + I(x,y+1) + I(x,y-1) - 4I(x,y)$$

数値解析

- 線形化
- 差分法等: 連立方程式
- 数値解法: 結果

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

演習: 平滑化・エッジ

www.riken.jp/brict/Yoshizawa/Lectures/index.html

www.riken.jp/brict/Yoshizawa/Lectures/Lec18.pdf

www.riken.jp/brict/Yoshizawa/Lectures/Ex11.zip

✓演習18-1:エッジ強度画像の作成.
✓演習18-2: 拡散方程式による平滑化フィルタの作成.

↑はReport06の内容です。

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

演習18－1

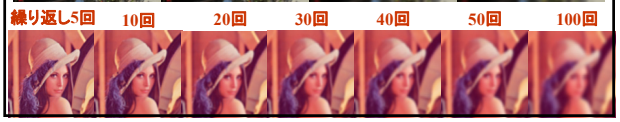
✓ エッジ強度画像の作成: Ex11.zip内のEdgeMagnitude.cxxの中にあるコメントに従ってソーベル作用素を使った勾配強度画像を生成するプログラムを作成しましょう.

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

演習18－2

✓ 拡散方程式による平滑化フィルタの作成: Ex11.zip内のDiffusion.cxxの中にあるコメントに従って拡散方程式による平滑化フィルタを作成しましょう.

✓ 微小時間epsilon=0.25で繰り返し10,20,30,40,50,100で実行してみましょう.



Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

次回の予定

✓ 特徴保存フィルタ: Nonlinear Diffusion, Bilateral & Non-Local Meansフィルタ.